数理解析研究所講究録
357巻 1979年 33-43

面積∞の領域における Laplacian の固有値分布

京大理大学院　浅倉史興

§0. 序. 次の問題の固有値の漸近分布を考える.

$$(0.1)\quad \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } G \qquad G \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{on } \partial G \qquad \partial G \text{ は十分滑らか} \end{cases}$$

$N(\lambda) = \{\lambda$ を越えない固有値の数（重複度を込めて）$\}$ として，$N(\lambda)$ の $\lambda \nearrow \infty$ における挙動を考察する. G が有界のとき Δ の spectre は discrete となり

$$(0.2)\qquad N(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi}(G\text{の面積}) \qquad (\text{Weyl の公式})$$

が成立する. 我々は G が非有界で，とくに G の面積が有限でないときの $N(\lambda)$ の挙動に興味を持つ. この問題に対するひとつの解答として H. Tamura [7] が挙げられる. 田村氏は

$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < b(x)\}$, $\dfrac{A}{(1+|x|)^\alpha} \leq b(x) \leq \dfrac{B}{(1+|x|)^\alpha}$

$(0 < \alpha \leq 1)$ の形の領域に対して（この場合 Δ の spectre は discrete となる. §1 参照），

$$(0.3)\qquad N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\lambda \geq \frac{n^2\pi^2}{b^2(x)}} \left(\lambda - \frac{n^2\pi^2}{b^2(x)}\right)^{1/2} dx$$

を得た. とくに $\lim_{|x|\to\infty} |x|^\alpha b(x) = a$, のとき

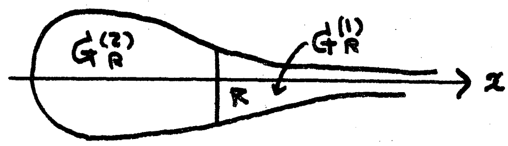
$$N(\lambda) \sim \frac{1}{2\pi\alpha}\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{\alpha}} B\left(\frac{3}{2}, \frac{\alpha}{2\alpha}\right)\zeta\left(\frac{1}{\alpha}\right)\lambda^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha}} \quad (0<\alpha<1) \tag{0.4}$$
$$\sim \frac{a}{2}\lambda\log\lambda \quad (\alpha=1) \text{ となる.}$$

この小論において我々は少しく古典的な方法でこの問題を考察する．対象となる領域は方法論的に，田村氏とは異なった形の強い制限を受ける。

§1．主定理．

$G_R^{(1)} = \{(x,y)\in G \mid x > R\}$

$G_R^{(2)} = \{(x,y)\in G \mid x < R\}$



と表わすことにする．我々は次の性質をもつ領域を考える．

仮定(A)． i) $\exists R_0 > 0$， $G_R^{(1)} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x)<y<f(x)\}$，$G_R^{(2)}$ = 有界， for all $R > R_0$ と表わせる．(上図参照)

ii) $b(x) = f(x) - g(x)$ (領域の巾) としたとき $\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$ となる．

仮定(B)． $\int_{R_0}^{\infty} b(x)\,dx = \infty$．(面積が$\infty$)

仮定(C)． i) $f'(x), g'(x) \to 0 \quad (x\to\infty)$。

ii) $A/x \leq -b'(x)/b(x) \leq B/x \qquad A, B > 0$．

iii) $|b''(x)| \leq C\,b(x)/x^2$， $|b'''(x)| \leq C\,b(x)/x^3$，$C>0$。

注意(1.1)． i) 領域Gが仮定(A)をみたせば問題(0.1)のspectreはdiscreteになる（F. Rellich [6]，D.S. Jones [5]を参照）。これは次の不等式が成りたつことによる（Courant-

Hilbert [3] Kap 7 では Friedrichs の不等式と云われている)。

(1, 1)　$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists \omega_1, \cdots \omega_N \in L^2(G)$ が存在して $\forall \phi \in H_0^1(G)$ について

$$\|\phi\|_{L^2}^2 \leq \sum_{j=1}^{N} |(\phi, \omega_j)|^2 + \varepsilon D[\phi]$$

ここで　$D[\phi] = \iint_G \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 dx\,dy$.

ii) 仮定(C)の ii) により　$b(x)$ は単調減少である，このことは以下の議論で本質的である.

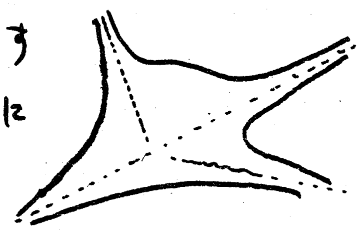
定理(1. 2). 仮定(A), (B), (C) をみたす領域において,

$$(1, 2)\qquad N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\lambda \geq n^2\pi^2/b^2(x)} \left(\lambda - n^2\pi^2/b^2(x)\right)^{1/2} dx$$

$$(1, 2)' \qquad = \frac{\lambda}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_{k+1}}^{X_k} b(x) \sum_{j=1}^{k} \left[1 - \frac{(\pi j)^2}{b^2(x)\lambda}\right]^{1/2} \left[\frac{\pi}{b(x)\lambda^{1/2}}\right] dx$$

ここで $X_k = X_k(\lambda)$ であって　$\lambda = k^2\pi^2/b^2(X_k)$ をみたす.

注意(1. 3). i) 仮定(A), (B) (C) をみたす領域の有限和で表される領域（右図）についても同様である.



ii) ある平面曲線の管状近傍と表わされる領域についても，その曲線の曲率が適当に 0 に減少していればよい.

iii) (1, 2)′ は (1, 2) の積分と和とを交換したもので，$\sum_{j=1}^{k} \left[1 - \frac{(\pi j)^2}{b^2(x)\lambda}\right] \left[\frac{\pi}{b(x)\lambda^{1/2}}\right]$ は 半径 1 の円の 1/4 の Riemann 部分和と考えられ，このことより $N(\lambda) \leq \frac{\lambda}{4\pi} \int_{x \leq X_1(\lambda)} b(x)\,dx$ がわかる.

以下定理(1.2)の証明の概要を述べる.

§2. 変分法による考察.

次の4つの固有値問題を考える.

$$(\mathrm{I})_j \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } G_R^{(j)} \\ u = 0 & \text{on } \partial G_R^{(j)} \cap \overline{G} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \{x = R\} \cap G \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})_j \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } G_R^{(j)} \\ u = 0 & \text{on } \partial G_R^{(j)} \end{cases} \qquad j = 1, 2.$$

また, $A_R^{(j)}(\lambda) = \{(\mathrm{I})_j$ の固有値でλを越えないもの$\}$
$B_R^{(j)}(\lambda) = \{(\mathrm{II})_j$ 〃 $\}$

と表わすと次の命題が成りたつ。

命題(2.1)

$$B_R^{(1)}(\lambda) + B_R^{(2)}(\lambda) \leq N(\lambda) \leq A_R^{(1)}(\lambda) + A_R^{(2)}(\lambda).$$

∵) Courant の minimax principle による.

$B_R^{(2)}(\lambda)$, $A_R^{(2)}(\lambda) = O(\lambda)$ より, $N(\lambda)$ の挙動は $A_R^{(1)}(\lambda)$, $B_R^{(1)}(\lambda)$ により支配されることが予想される。変数変換と未知関数変換により $G_R^{(1)}$ を strip $(R, \infty) \times (0, 1)$ に写して考察をする.

$$(2.1) \begin{cases} \xi = x \\ \eta = b^{-1}(x)\{y - g(x)\}, \end{cases} \qquad \psi = b^{1/2}(x)\,\phi$$

とすると次が成りたつ.

命題(2.2)　R を十分大とする。

$$D_R[\phi] = \iint_{x>R} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 dx\,dy ,$$

$$\tilde{D}_R[\psi] = \int_0^1\int_R^\infty \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{1}{b^2(\xi)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2 d\xi\,d\eta \quad \text{とおくと.}$$

i) $\widetilde{\|\psi\|}_R^2 = \int_0^1\int_R^\infty \psi^2\, d\xi\, d\eta = \|\phi\|^2_{G_R^{(1)}}$.

ii) $\forall \varepsilon>0$ に対して、$\exists R_0$ が存在して $R \geq R_0$ のとき

$$(1-\varepsilon)\tilde{D}_R[\psi] - \varepsilon\widetilde{\|\psi\|}_R^2 \leq D_R[\phi] \leq (1+\varepsilon)\tilde{D}_R[\psi] + \varepsilon\widetilde{\|\psi\|}_R^2,$$

が成り立つ。

命題(2.2)により $(\mathrm{I})_1, (\mathrm{II})_1$ の固有値分布は，$\tilde{D}_R[\psi]$ と $\widetilde{\|\psi\|}_R^2$ の変分問題のそれに漸近的に等しいであろうことがわかる。（但し数学的に厳密な証明は少しく細かな配慮が必要である。R. Asakura [1] を参照）。従って次の固有値問題(2.2)を考察する。

$$(2.2)\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \dfrac{1}{b^2(\xi)}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \lambda\psi = 0 & \text{in } (R,\infty)\times(0,1) \\ \psi_\xi = 0 \quad \text{on } \xi=R, & \psi = 0 \quad \text{on } \eta = 0, 1 \\ \qquad\qquad \text{or} & \\ \qquad\qquad \psi=0 \quad \text{on } \xi=R, & \eta=0,1 \end{cases}$$

$\psi(\xi,0) = \psi(\xi,1) = 0$ より $\psi(\xi,\eta) = \Psi_n(\xi)\sin n\pi\eta$ と分離すると．Ψ_n は次の固有値問題の解である．

$$(2.3)\begin{cases} \Psi_n'' + \{\lambda - n^2 q(x)\}\Psi_n = 0 & \text{in } (R,\infty) \\ \Psi_n'(R) = 0 \quad \text{or} \quad \Psi_n(R) = 0 & \end{cases}$$

[5]　　$q(x) = \pi^2/b^2(x)$.

注意(2.3). i) (2.3)の固有値の漸近分布は仮定の下で

$N_n(\lambda) \sim \frac{1}{\pi}\int_{\lambda \geqq n^2 q(x)} (\lambda - n^2 q(x))^{\frac{1}{2}} dx$ となる，我々が求める

ものは $N_*(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(\lambda)$ であるから $N_n(\lambda)$ の剰余項の n について一様な評価が必要である.

ii) 田村氏も証明の途中で $\Phi_n'' + \{\lambda - \alpha n^2 |x|^{2\alpha}\}\Phi_n = 0$ の固有値の漸近分布（nについて一様な）を用いておられるが，この場合は x の変数変換により n^2を係数から消去できる. 従ってこの§3の考察は必要ない.

§3. 特異 Sturm-Liouville 問題.

$\Phi_n(x, \lambda)$ を

$$(3.1)\quad \begin{cases} \Phi_n'' + \{\lambda - n^2 q(x)\}\Phi_n = 0 & \text{in } (R, \infty) \\ \lim_{x\to\infty} \Phi_n(x, \lambda) = 0 \end{cases}$$

の解とする（これは定数倍を除いて一意的に定まる）.

命題(3.1) $\lambda_m^{(n)}$ が (2.3)の固有値であるためには

$\Phi_n'(R, \lambda_m^{(n)}) = 0$ もしくは $\Phi_n(R, \lambda_m^{(n)}) = 0$ となることが必要十分である.

注意(3.2) $\lambda - n^2 q(x) \leqq 0$, $\forall x \geqq R$ をみたす固有値は存在しない，従ってとくに $\lambda/n^2 \leqq q(R)$ をみたす固有値は存在しない.

Langer-Titchmarsh の方法（又は WKB 法）により $\Phi_n(x, \lambda)$

の $\lambda \nearrow \infty$ としたときの漸近形を求める.

定理 (3.3)　$x \leqq X_n$ において $\Phi_n(x,\lambda)$ は次の漸近形をもつ.

$$\text{(3.2)}\quad \begin{aligned} \Phi_n(x,\lambda) &= (\phi_n'(x))^{-\frac{1}{2}}\left\{ Ai(\lambda^{\frac{1}{3}}\phi_n) + O(\lambda^{-\frac{1}{2}} X_n^{-1}) \right\} \\ \Phi_n'(x,\lambda) &= \lambda(\phi_n'(x))^{\frac{1}{2}}\left\{ Ai'(\lambda^{\frac{1}{3}}\phi_n) + O(\lambda^{-\frac{1}{3}} X_n^{-\frac{2}{3}}) \right\}. \end{aligned}$$

ここで　i)　X_n は $\lambda = n^2 q(X)$ の解，これは $q(x)$ ($b(x)$) の単調性により一意的に定まる，又 $X_n \geqq R$ である.

ii) $\phi_n = \phi_n(x,\lambda)$ は

$$\frac{2}{3}(\phi_n)^{\frac{3}{2}} = \int_{X_n}^{x}\left(\frac{n^2 q(t)}{\lambda} - 1\right)^{\frac{1}{2}} dt \qquad x \geqq X_n$$

$$\frac{2}{3}(-\phi_n)^{\frac{3}{2}} = \int_{x}^{X_n}\left(1 - \frac{n^2 q(t)}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} dt \qquad x \leqq X_n \quad \text{で}$$

定義される。

iii) $Ai(x)$ は所謂 Airy 関数で，$Ai(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right) dt$ である. $Ai(x)$ は $y'' = xy$ の解であって $x \to \infty$ としたとき減少する.

iv) 剰余項の O-symbol は n について一様である.

注意 (3.4)　$x \geqq X_n$ のときも同様な漸近形をもつが，注意 (3.2) により我々の考察には必要ない.

定理 (3.3) の証明の方針を述べる. A. Erdélyi [4] に沿う.

$A_n(x) = (\phi_n')^{-\frac{1}{2}} Ai(\lambda^{\frac{2}{3}}\phi_n)$　とおくと A_n は

$$\text{(3.3)}\qquad A''(x) + \lambda p_n A(x) + \frac{1}{2}\{\phi_n, x\} A(x) = 0 \quad \text{をみたす。}$$

ここで $p_n(x,\lambda) = 1 - \frac{n^2 q(x)}{\lambda}$，$\frac{1}{2}\{\phi, x\} = \phi'''/\phi' - \frac{3}{2}(\phi''/\phi)^2 =$

$$\frac{p_n''}{4p_n} - \frac{5}{16}\left\{\frac{p_n'}{\varphi_n^3} + \left(\frac{p_n'}{p_n}\right)^2\right\},$$ 所謂 Schwarzian 微分.

従って $\Phi_n'' + \lambda p_n(x)\Phi_n + \frac{1}{2}\{\varphi_n x\}\Phi_n = \frac{1}{2}\{\varphi_n x\}\Phi_n$ と考え Φ_n と積分方程式で解く. 積分核を $K_n(x,t,\lambda) = -\pi\lambda^{1/3}\{A_n(x,\lambda)\times B_n(t,\lambda) - A_n(t,\lambda)B_n(x,\lambda)\}$ $(B_n = (\varphi_n')^{-1/2}B_i(\lambda^{1/3}\varphi_n))$ とおくと Φ_n は積分方程式

$$(3.4)\qquad \Phi_n(x,\lambda) = A_n(x,\lambda) - \frac{1}{2}\int_x^\infty K_n(x,t,\lambda)\{\varphi_n, t\}\Phi_n(t,\lambda)\,dt$$

の解である.

積分核が $|K_n(x,t,\lambda)| \leq \dfrac{\mathrm{Const}\times(\varphi'(x))^{-\frac{1}{2}}(\varphi'(t))^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{2}{3}|\mathrm{Re}(-\lambda^{\frac{2}{3}}\varphi(x))^{\frac{3}{2}} - \mathrm{Re}(-\lambda^{\frac{2}{3}}\varphi(t))^{\frac{3}{2}}|}}{\lambda^{2/3}(1+|\lambda|^{\frac{1}{6}}|\varphi(x)|^{\frac{1}{4}})(1+|\lambda|^{1/6}|\varphi(t)|^{\frac{1}{4}})}$ の評価をもつこと (A. Erdélyi, [4] Chap 4 参照) を考えれば.

$C_n = \int_{R_0}^\infty |\{\varphi_n t\}||p_n(t,\lambda)|^{-1/2}dt$ とおくとき

$$(3.5)\qquad \Phi_n(x,\lambda) = A_n(x,\lambda)\{1 + O(\lambda^{-1/2}C_n)\} + O(B_n(x,\lambda)C_n\lambda^{-1/4}) \qquad x \leq X_n$$

となることがわかる. A. Erdélyi [4] chap 4 においては有界な区間のときのみを扱っているがその方法が一字一句そのまま我々の場合にあてはまる。C_n の評価については,

補題 (3.4) $q(x)$ が

i) $q(x) > 0$. ii) $A/x \leq q'(x)/q(x) \leq B/x$. iii) $|q''(x)|/q(x) \leq C/x^2$ $|q'''(x)|/q(x) \leq C/x^3$. をみたすとすると

$$\int_{R_0}^\infty |\{\varphi_n t\}||p_n(t,\lambda)|^{-1/2}dt \leq C/X_n^{-1}$$

となる.

以上により定理(3.3)が証明される.

命題(3.1)と定理(3.3)を考え合わせると(2.3)の固有値分布を調べることはAiry関数とその導関数の零点の分布を調べることに帰着されることがわかる。Airy関数について以下のことが基本的である.(A. Erdélyi [4], E.C. Titchmarsh [8] Chap 7)

i) $x\,(>0)$ が十分大きなとき

$$Ai(-x) = \pi^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}} \left\{ \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) \right\}$$

が成りたつ.

ii) n が十分大きなとき, $Ai(-x)$ は $0 < x < \left\{\frac{3}{2}\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi\right\}^{2/3}$ に丁度 n 個の零点をもつ.

iii) $Ai(-x)$ の零点と $Ai'(-x)$ の零点は互に他を分離する。(これは $Ai(x)$ が二階の方程式をみたしていることによる).

i), ii), iii) により次の定理を得る.

定理(3.5)

$$(2.3)\begin{cases} \Phi'' + \{\lambda - n^2 q(x)\}\Phi = 0 & \text{in } (R, \infty) \\ \Phi'(R) = 0 \quad \text{もしくは} \quad \Phi(R) = 0 \end{cases}$$

の固有値の漸近分布は(どちらの場合にも)

$$(3.6) \qquad N_n(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_R^{X_n} (\lambda - n^2 q(x))^{1/2}\,dx + O(1)$$

となる, ここで O-symbol は n について一様である.

証明は F. Asakura [1], E.C. Titchmarsh [8] Chap 7) を参照.

(3.6)の$N_n(\lambda)$をnについて加え合わすと作用素$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{1}{b^2(\xi)}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$に対する(2.2)の固有値分布は

(3.7) $$N_*(\lambda)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_R^{X_n}\left(\lambda-\frac{n^2\pi^2}{b^2(x)}\right)^{\frac12}dx+O(\lambda^{\frac12})$$

となる。(3.7)の和は形式的には無限和であるが，注意(3.2)より $n\leq\sqrt{\frac{\lambda}{g(R)}}$ をみたすnについてのみ$N_n(\lambda)$を加えればよい。(　て剰余　のorderが$\lambda^{\frac12}$となっている)

あと$N_*(\lambda)$を詳しく見てやれば(F. Asakura [1] 参照)定理(1.2)が証明される。

§4 余計なこと.

以上説明してきたことは変数分離をして固有値の漸近分布を調べる方法としては古典的なものである．直接的には E.C. Titchmarsh による corrected Bohr-Sommerfeld quantization condition の厳密な証明の方法に負う(E.C.Titchmarsh [8] Chap 7)

この問題の高次元への拡張は，たとえばGがx軸を含むとしてx軸に直交する超平面でGを切ったときの切り口がすべてひとつの有界な領域に相似である場合は全く平行な議論により可能である。外の場合は難かしい.

又仮定(A),(C)をみたす面積有限の領域については以上の証明をたどると(とくに命題(2.1)の$B_R^{(2)}$, $A_R^{(2)}$をそのまま残すと) $N(\lambda)\sim\frac{\lambda}{4\pi}$(Gの面積)が証明されている.

参考文献

[1] F. Asakura ; to appear in J. Math. Kyoto. Univ.

[2] R. Courant, D. Hilbert ; 数理物理学の方法 第二巻 (東京図書)

[3] 〃 〃 第四巻 〃

[4] A. S. Erdelyi ; Asymptotic Expansions. (Dover)

[5] D. S. Jones ; Proc. Camb. Phil. Soc, 49 (668 ~ 684)

[6] F. Rellich ; Studies and Essays Presented to R. Courant

329 ~ 344 (1948)

[7] H. Tamura ; Nagoya. Math. J. Vol 60, 7 ~ 33 (1976)

[8] E. C. Titchmarsh ; Eigenfunction Expansions. Vol I

2nd edition (1962).